명제 논리학

명제의 참 거짓과 증명

명제 논리학

명제 논리학 : 복합 명제로 구성된 논의의 분석

진리양식 : 명제를 결합시킬 때의 논리적 양식

진리표로 표현가능

- 합접(conjunction): p 와 q ($p \wedge q$) :
  p, q 모두 참일 때 참
- 이접(disjunction): p 또는 q ($p \vee q$) :
  p, q 중 하나가 참이면 참

- 부정(negation): $-p$ ($\neg p$): p가 참이면 $\neg p$ 는 거짓 p가 거짓이면 $\neg p$ 는 참임.
- 조건(conditional): p이면 q ($p \to q$) : p가 참인데도 q가 거짓이면 거짓임.
- 진리양식은 명제들을 결합시키는 규칙을 설명한다. 그러면 하나의 명제로부터 다른 명제를 유도하는 양식은 무엇인가?

진리표

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T

기호의 의미

- $P \Rightarrow Q$ 는
  $P \rightarrow Q$ 란 명제가 항상 참
  (항진: tautology)일 때를 나타낸다.

- $P \Leftrightarrow Q$ 는 P 와 Q가 동치임을 표시한다

- 긍정식 (modus ponens MP)

  $p \rightarrow q$ 와 p 로 부터 q 를 추론한다.

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

- 부정식 (modus tollens MT)

  $p \rightarrow q$ 와 $\neg q$ 로 부터 $\neg p$ 를 추론한다.

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

- 배리법(reductio ad absurdum RA)

  $[p \wedge \neg q] \rightarrow c$ 로 부터 $p \rightarrow q$ 를 추론한다.

  (c 는 모순을 뜻함).

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge \neg q] \rightarrow c$$

- 긍정식 (modus ponens MP)

$p \rightarrow q$와 p로 부터 q를 추론한다.

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

– 예) 낙관론자들이 비관론자보다 성공할 가능성이 높다면 우리는 낙관론자가 되어야 한다. 낙관론자들은 비관론자 보다 성공할 가능성이 높다. 따라서 우리는 낙관론자가 되어야 한다.

- 부정식 (modus tollens MT)

$p \rightarrow q$와 $\neg q$로 부터 $\neg p$를 추론한다.

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

예) 개 한 마리와 말 한 마리가 마구간에 있었고, 누군가 들어와 말 한 마리를 끌고 가는 동안 그 개는 짖지 않았다. 분명히 그 침입자는 그 개가 알고 있는 사람이다.

- 논리합삼단논법(disjunctive syllogism DS)

  $p \vee q$와 $\neg q$로 부터 p를 추론한다

  $$[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$$

- 추이법칙 (transitive law)

  $$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$

진리표를 이용한 긍정식 유도

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
T	T	T	T	T T T
T	F	F	F	F T F
F	T	T	F	F T T
F	F	T	F	F T F

몇 가지 범하기 쉬운 오류들

- 후건 긍정의 오류: 길이 얼면 우편배달부는 늦는다. 우편배달부가 늦었다. 그러므로 길이 얼었다.
- 전건 부정의 오류: 길이 얼면 우편배달부는 늦는다. 길이 얼지 않았다. 따라서 우편 배달부는 늦지 않을 것이다.
- 창의적인 사람은 거짓말을 할 가능성이 높다고 실험결과 알려져 있다. 그는 창의적인 사람이다. 그러므로 그는 거짓말쟁이다.
  (일부를 전체로 오인함)

참고) 다른 법칙들

- 이중부정의 법칙 $p \equiv \neg\neg p$
- 결합법칙 $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv ((p \wedge q) \wedge r)$

  $(p \vee (q \vee r)) \equiv ((p \vee q) \vee r)$
- 분배법칙 $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

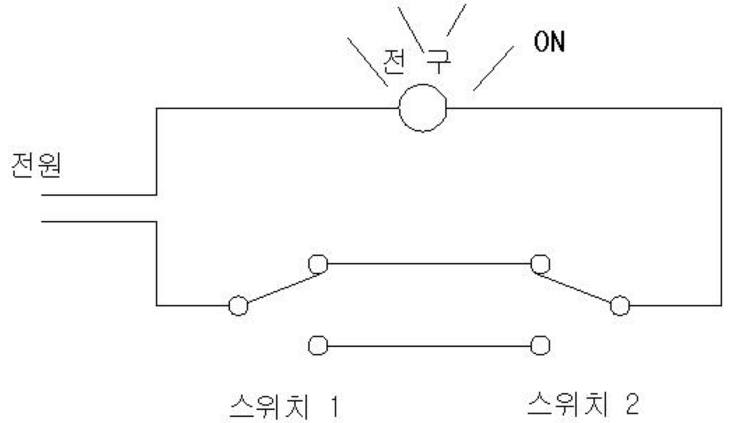
  $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
- 드 모르간의 법칙 $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

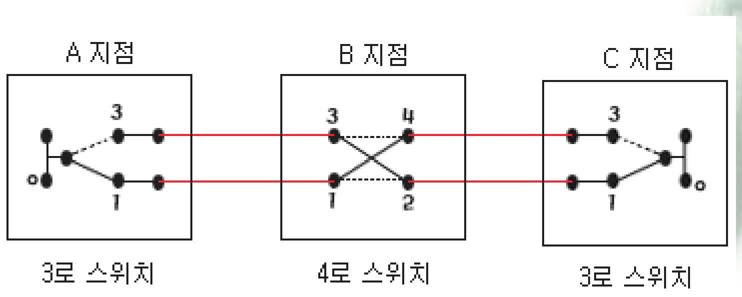
  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$
- 그 외

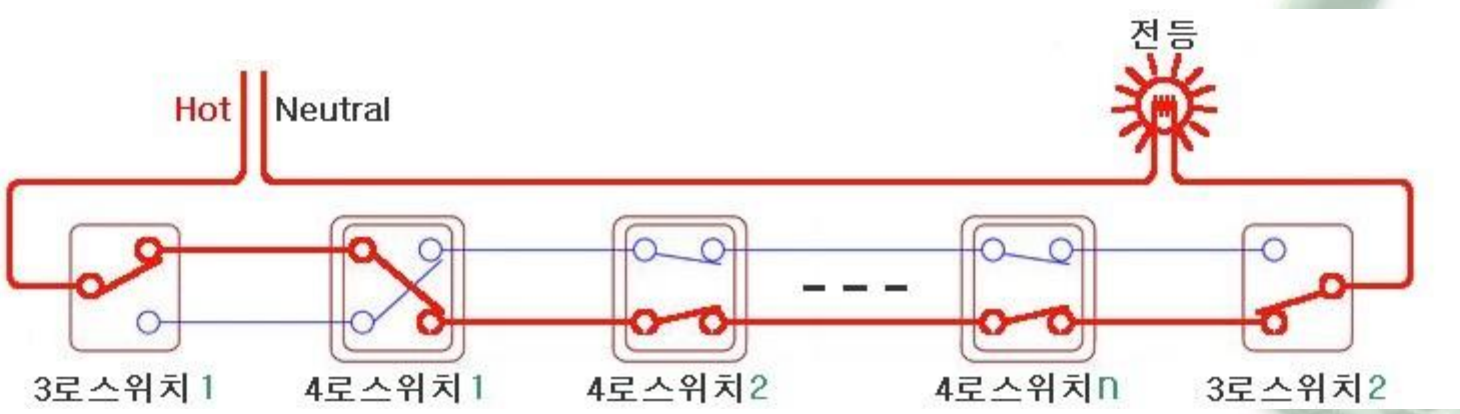
- 명제논리학(불대수와 관련 1과 0은 전류의 흐름과 단절로 컴퓨터 혁명의 주 이론)은 전기의 병렬 직렬 등과 관련이 있어 컴퓨터의 설계에 지대한 공헌을 함

  – 예) 삼선공사와 명제

참고) 3로스위치와 4로스위치







술어 논리학(predicate logic)

- 수학적 증명과 관련된 양식: Peano와 Frege가 성질이나 술어를 기초로 하는, 명제논리학 보다 확장된 논리학을 구성. 구성규칙들은 모든 명제연산과 2개의 기호(모든 ∀과 일부 ∃)로 이루어진다.
- 명제 이를테면 [모든 사람은 죽는다] 를 다음과 같은 술어 논리학의 문법

[모든 x 에 대하여 x 가 사람이면 x는 죽는다]

로 분리하여 명제의 내부적 구조를 노출시킨다. 즉 한정기호와 술어 및 술어들 사이의 관계(조건 →)을 명백히 나타내는 것이다.

- 이를 이용 논리적 구조가 복잡하더라도 순차적으로 구조를 파악할 수 있게 함.
- 술어 논리학은 수학적 증명의 양식을 형식적인 방법으로 파악할 수 있는 도구를 수학자들에게 제공. 이 연구 덕분에 술어 논리학이 수학적 진실성을 확립하는 믿음직한 방법임을 확인하게 됨.
- 술어 논리학의 연산규칙 하나

모든 사람이 행복한 것은 아니다 = 일부 사람은 행복하지 않다.

$$\neg[\forall x : P(x)] = [\exists x : \neg P(x)]$$

추상적 개념과 수학 , 공리적 방법

- 모든 수학은 추상적 개념을 다루고 있다. 수학의 많은 부분이 물리세계에서 자극을 받고 이를 묘사하는데 사용될 수 있지만, 수학자들이 실제로 다루고 있는 수, 기하학적 도형, 여러 가지 양식과 구조 등은 순수한 추상적 개념이다. 그러면 수학자들은 추상적 개념에 관한 주장의 진위여부를 어떻게 결정하는가? 물리학이나 화학 등과 같이 실험에 의하여 진위여부를 판단할 선택권은 수학에는 없다. 수학적 진실은 일상적인 경험과 직관에 매우 모순 될 수도 있다.
  - 예) 유리수가 아닌 실수의 존재

수학에서의 진실

수학에서의 진실은 다수결이나 권위에 의하여 결정되지 않는다. 다만 증명에 의하여 결정된다. 그러나 증명이 수학의 전부라고 말하는 것은 아니다. 새로운 양식을 찾고 분석하며, 그 양식이 새로운 영역에도 있는지 조사하고 실제현장에 사용가능한지 적용하는 것과도 관련 있다.

수학적 진실의 표현 형태는 기본적으로 $A \rightarrow B$ 꼴을 갖는다. 이것은 모든 수학적 사실이 몇 개의 초기 가정, 즉 공리로부터 연역에 의하여 증명되기 때문이다.

어떤 사실 B가 참이다 하는 것은 이 사실이 가정된 공리들 중의 일부에 근거하여 증명되었다는 의미이고 공리란 명백하거나 적어도 수학계 내에서 널리 받아들여진 가정을 뜻한다. 일반적으로 공리들이 묘사하는 체계는 묘사하려고 원했던 체계가 아닐 가능성도 충분히 있다. 예를 들면 유클리드 기하학은 우리 주변의 근사적 사실만 묘사하고 있음을 19세기에 알게 되었다.

집합론과 E형 논리의 이해

추상적 집합론에 대한 수학적 이론은 19세기말 Georg Cantor(1845-1918)에 의하여 완성됨 : 20세기 초까지 집합론은 수학의 일반적 체제가 됨.

집합론의 모순발견(1902년 6월)-공리체계에서 모순성은 치명적임. 어떤 성질을 만족하는 대상전체의 집합은 존재한다는 믿음에 대한 근거를 보장하지 않음. 러셀(1872-1970 수학과 출신으로 노벨문학상을 수상)

- M이 이 강좌에서 명시적으로 나타내는 집합 전체의 집합이라면 $M \in M$이다. 그러나 자연수 집합 N에 대하여 $N \notin N$이다. 이와 같은 성질[집합 x는 자기 자신의 원소가 아니다]에 주목하면서 이 성질을 만족하는 집합들 전체의 집합을 여기서

$$\Gamma = \{A \mid A \notin A\}$$

로 정의하면 $\Gamma \in \Gamma$ 인가 아닌가?

- 수학자들은 임의의 성질에 대하여 그 성질을 만족하는 대상전체의 집합이 존재한다는 가정을 포기해야만 할 것으로 보인다. 이는 우리의 직관과 모순 된다.

이 사실에서 그리스 논리학의 배중율은 부정될 경우가 있음을 알 수 있다.
이는 이원론의 붕괴를 의미한다.

- 우리의 감각이 어떤 관념을 이해의 영역으로 옮길 때, 우리와는 상관없이 그 무엇인가가 실제로 존재하고 있었다는 사실을 받아들이게 된다. 그리고 그 사실은 우리 감각에 영향을 끼치며 그로 인해 우리의 지각체계가 사물을 알아 챈다. 그 후에야 비로소 우리가 감지하고 있다는 생각을 만들어 낸다. 아직까지 우리는 감각이 만들어 낸 것을 의심할 수가 없다. 존 로크
- 그 무엇도 직관만으로 이해할 수는 없으며 감각 또한 그 자체만으로 아무것도 생각하지 못한다. 오로지 그들이 조화를 이룰 때 지식이 나타날 수 있다. -칸트

우리는 어떤 사물에 대한 우리의 주관적 경험이 그 사물의 속성을 있는 그대로 담고 있다고 자동적으로 가정하고 있는 것이다. 우리는 우선 보이는 그대로를 믿고 굳이 그 믿음을 버려야 한다면 그때 가서야 그 믿음을 저버린다.

어떤 것의 부재를 생각하지 못하는 현상은 우리 일상생활에서 벌어지는 많은 오류중의 원천이라는 것이 밝혀졌다. -대니얼 길버트

Hilbert(1862 -1943)계획과 Gœdel(1906 -1978)의 불완전성의 정리

- Hilbert의 계획 : 무 모순이고 완전한 공리체계의 발견을 목적으로 함.
  - 1)완전한 공리체계 (그 공리에서 발생한 문제는 그 공리 내에서 해결가능: 다시 말하면 추가적 공리의 불필요)
  - 2)무 모순의 공리체계 (모순이 발생하지 않는 체계)

- Gœdel(1931년)의 불완전성의 정리 :

  Hilbert의 계획을 무산시킴

무 모순인 임의의 공리체계를 설정하더라도 (필요한 경우 추가적 공리를 삽입하더라도), 그 체계는 반드시 불완전하다.

즉, 공리에 근거해서 답할 수 없는 문제가 그 공리 체계 내에 존재한다는 것이다.

무명촌은 무명촌인가? 이름없는 신(로마시대)은 이름없는가?

(언어의 이중구조(이율배반) 때문에 일어 나는 현상)

방법

- 1) 거짓말쟁이의 역설 이용 : 거짓말쟁이가 [나는 거짓 말하고 있다]라고 할 때의 판단은?
- 2)진실성 대신 증명 가능성으로 대치
- 3)명제논리학을 수론으로 번역하는 방법 밝힘
- 4)특수한 수론 명제를 제작 : 증명불가능성 밝힘
- 유사한 예) 영화 Minority report, Truman Show
- 신약성서 디도스1장 12절 에피메니데스(Epimenides) 의 역리 나타남
  - 그레데(크레타) 사람들은 언제나 거짓말쟁이이고 몹쓸 짐승이고 먹는 것 밖에 모르는 게으름뱅이이다. 그리고 이 증언은 옳은 말이다라고 바울은 말한다.

(*) 이 쪽에서 *표를 붙인 명제는 증명 불가능하다.

- 해설: 위 명제는 참이거나 거짓이어야 한다. 거짓이면 증명 가능하다. 증명 가능하다는 이야기는 위 명제가 참이라는 이야기이다. 따라서 증명 불가능이어야 한다. 그러므로 명제 (*)는 틀림없이 참이다. 명제(*)는 증명 가능한가? 이 명제의 진실성은 증명 불가능함을 의미한다. 따라서 명제 (*)는 주어진 공리체계로부터 증명될 수 없다. 그러므로 (*)는 수학적 구조에 대하여 참인 명제이나 그 구조의 공리체계로부터는 증명될 수 없다.

기타 최근의 동향

증명이론 : 아리스토텔레스가 시작, 불에 의해 지평이 넓어짐, 인공지능분야로 발전, 결정불가능 (undecidable)성의 이론 개발:

Cohen 예) 연속체문제

계산가능성이론(computability theory) 복잡도문제

Turing : 원하는 모든 계산을 수행하도록 '프로그램'시킬 수 있는 단 하나의 계산기의 이론적 존재가능성 입증하는 추상적 정리증명

Kleene : 위의 계산기를 위한 프로그램은 실행될 데이터와 본질적으로 같음을 증명.

Fuzzy 이론 (다가 논리)

참고: 영화 Matrix, Animatrix.

오늘날의 과학에서 발견된 중요사상

아인슈타인의 상대성이론 – 절대적 기준의 사라짐

하이젠베르크의 불확정성의 원리 – 양자역학에서의 불확정성

토마스 쿤의 과학혁명의 구조 – 과학혁명이 일어 나려면 축적된 지식과 넘지 못하는 사고의 벽이 한참 동안 작동해야 사고의 벽을 넘는 창의적 사고가 출현하게 됨

정리 및 예습

- 정리
  - 비판적 사고와 그 활용에 대하여 설명하기
  - 유효한 추론 전개 방법 이해하기
  - 집합론의 모순에 대하여 이해하기
  - 괴델의 불완전성 이론 이해하기

- 예습
  - 고등학교에서 배운 변화율에 대하여 알아보기