운동과 변화

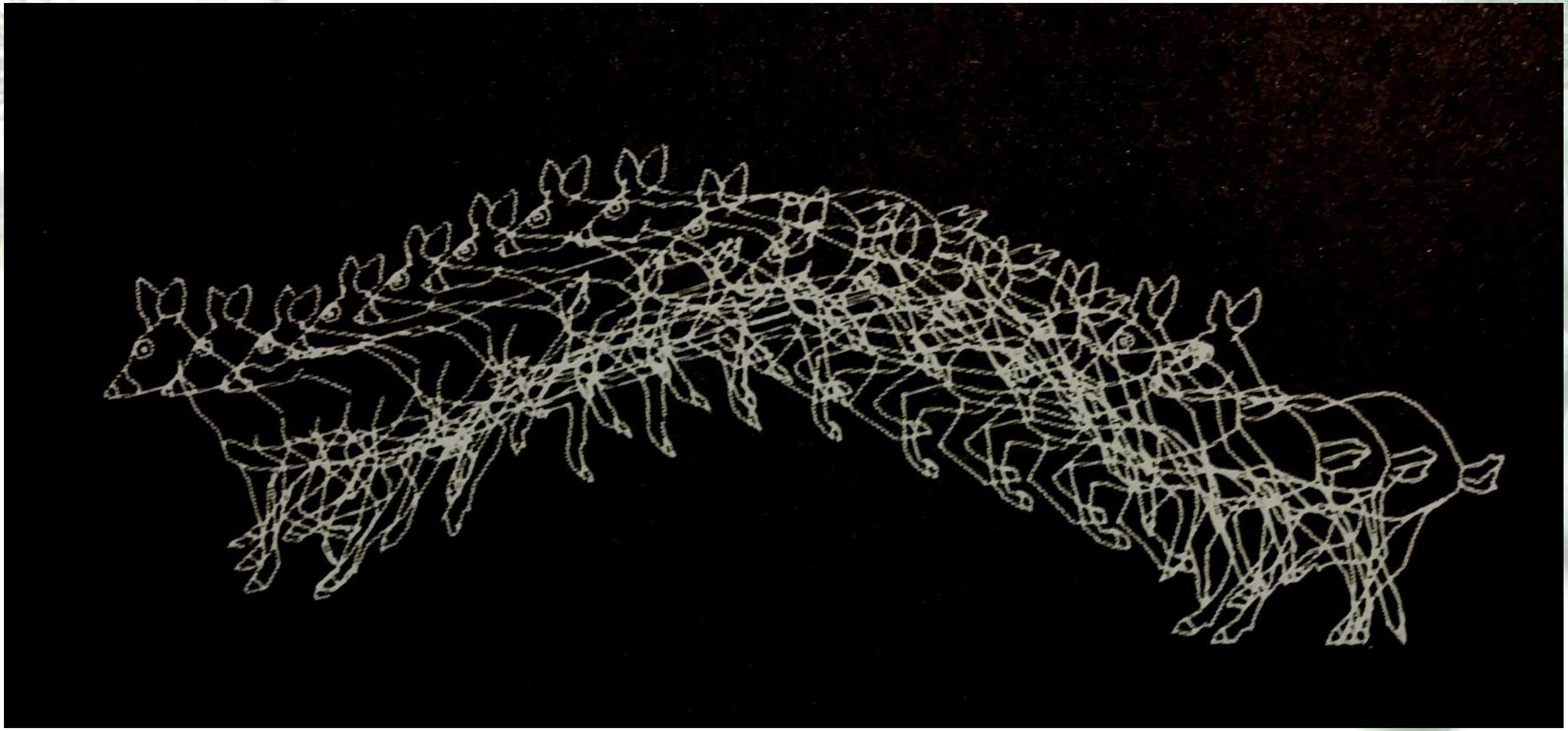
운동과 변화의 양식

운동과 역설

- 운동과 변화 : 정적인 도구로 동적인 변화를 표현하기.
- Zeno (기원전 495-430년) 의 역리

  운동의 역설 : 운동이란 없다

  – 해설 : 점 A에서 점 B로 움직인다는 것은 선분 AB의 중점 C를 지나야 하고, 또 C를 지나기 전에 AC의 중점을 지나야 한다. 따라서 유한 시간에 무한히 많은 점을 통과해야만 하므로 운동이란 없다.



운동의 역설. 모든 순간에 물체는 반드시 정지 상태에 있다. 이 개념은 뛰고 있는 사슴의 그림으로 포착된다. 이것은 모든 순간에 참이기 때문에 물체는 항상 정지 상태에 있게 될 것이다. 그렇다면 운동이 어떻게 나타날 수 있을까? 그리스 철학자 제논은 시간이 일련의 불연속적인 순간들로 이루어져 있다는 믿음에 대한 도전으로 이 역설을 제기했다.

- 화살의 역설 : 나는 화살은 정지하고 있다.
  - 해설: 모든 물체는 어떤 특정한 시간에 어떤 특정한 장소에만 있을 수 있다. 따라서 움직이는 물체는 어떤 특정 시간에 정지해 있는 물체와 구별이 불가능하다. 이것은 모든 순간에 대하여 참이다. 그렇다면 물체는 어떻게 움직일까? 모든 순간에 정지한 물체라면 항상 정지해 있는 것 아닌가?

- Achilles(아테네의 육상선수)와 거북이 역설 : 거북이 뒤를 쫓는 아킬레스는 거북이를 잡을 수 없다.
  - 해설: 아킬레스가 거북이가 있던 지점에 오면 거북이는 다소 전진해 있다. 따라서 아킬레스가 다시 거북이가 있는 곳에 닿으면 역시 거북이는 전진해 있다. 그러므로 영원히 거북이를 잡을 수 없다.
- 한없는 운동 1− 1/2− 1/4 −1/8 −1/16 −…
- 다단계 1+ 1/10 + 1/100 + …

- 최소단위의 시간이란 없다 :
  - 해설: 최소단위의 시간이 주어져 있으면 그 단위의 절반이 최소단위와 같아야 한다. 이것은 있을 수 없다.

역설: 논리의 약점에서 옴

당시 그리스 사람들의 시공간에 대한 분석적인 설명과 시도에 대하여 해결 불가능임을 입증하고 자 함.

Zeno(제논)은 운동은 모순적이며 따라서 수학적으로 다룰 수 없음을 말하고자 하였다.

아리스토텔레스는 자연과학은 존재하지만 변화하는 것을 다루고 수학은 독립적으로 존재하지 않지만 불변의 것을 다룬다고 생각하여, 의존하여 존재하며 변화하는 운동 같은 것은 자연과학에서도 수학에서도 다룰 수 없다고 하여 2000년 동안 수학자와 철학자들이 운동을 연구할 용기를 꺾었음.

이는 당시의 시공간과 무한의 개념의 이해의 부족에서 옴: 미분적분학의 발달로 해결.

중국 제자백가 중 名家(논리학파) :

공손룡(公孫龍 BC3세기 전반), 혜시(惠施 BC4 세기)가 유명

1) 크기가 없는 것은 모을 수 없으나, 그 크기는 1000리에 이른다.

2) 한자 길이의 실을 매일 반씩 줄여 가면 만년이 지나도 끝이 없다.(무한소를 현실에 투영한 역리)

3) 화살로 눈을 맞출 수 없다.(운동의 역리)

4) 아무리 빨리 나는 화살이라도 결코 나는 것도 정지해 있는 것도 아니다.

무한급수: 아킬레스의 역설의 해결

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$$

- 합을 구체적으로 더할 가능성은 없다.
- 수리적 방법으로 무한 합(무한급수)을 구할 수 있다. (무한급수가 유한값을 가질 수 있다. 무한값을 가진다고 생각했기에 역설적이다)
- 수리적 방법(조작)으로 합을 구할 수 있는 급수와 아닌 것들의 차이점과 분류 및 조작 방법이 수 백년 노력의 결실로 19세기말에 완성되었다.

$$S = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots$$

$$10S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \cdots = 100 + S$$

$$\therefore S = \frac{100}{9}$$

등비급수

- 등비급수 : $S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

조작: $rS = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = S - a$

$$\therefore S = \frac{a}{1-r}$$

조작의 정당성 : 등비의 절댓값이 1 보다 작아야 한다.

조화급수

- 조화급수 : $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

조작:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

조작의 정당성 결과: 조화급수의 합은 발산한다. (14세기 Nicole Oresme)

기타

- James Gregory(1671):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

- Euler 무한소 해석입문(1748) :무한급수해석

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

미분적분학의 발달 :

- 미분적분학의 아버지: 17세기 후반의 영국 Isaac Newton(1642-1727) 과 독일 Gottfried Leibniz(1646-1716)
- 미분적분학: 연속적인 변화를 나타낼 수 있는 경이적인 수학
- 미분의 목적 : 변화하는 양(함수로 표현)의 변화율을 얻는 것
- 미분 : 하나의 함수(공식)를 다른 함수(공식)로 만드는 과정
- 함수 : 주어진 수에 대하여 다른 수를 계산해 낼 수 있도록 하는 규칙(black box) .

함수의 예 :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

함수의 사용 예:

지진 소음도 산성도 등을 측정할 때 로그함수가 사용됨. 진파 최대 진폭이 A미크론일 때, 지진규모는

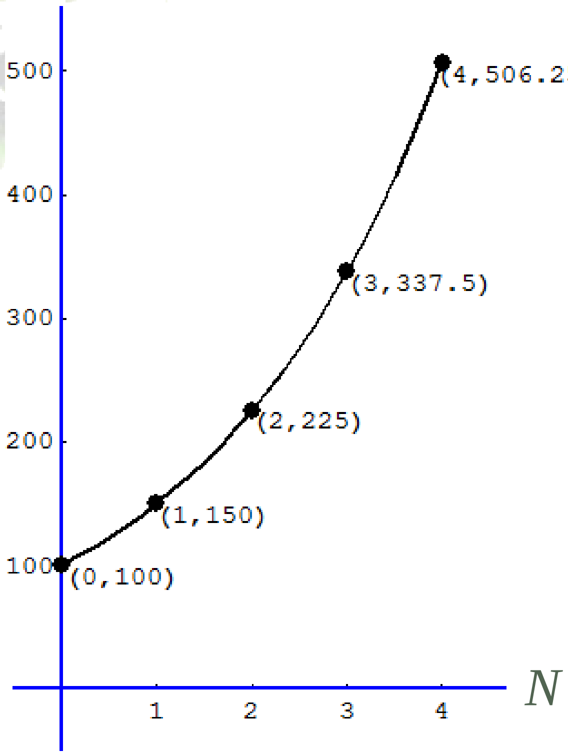
$M = \log_{10} A$로 정하고 이때의 에너지 E(erg)는

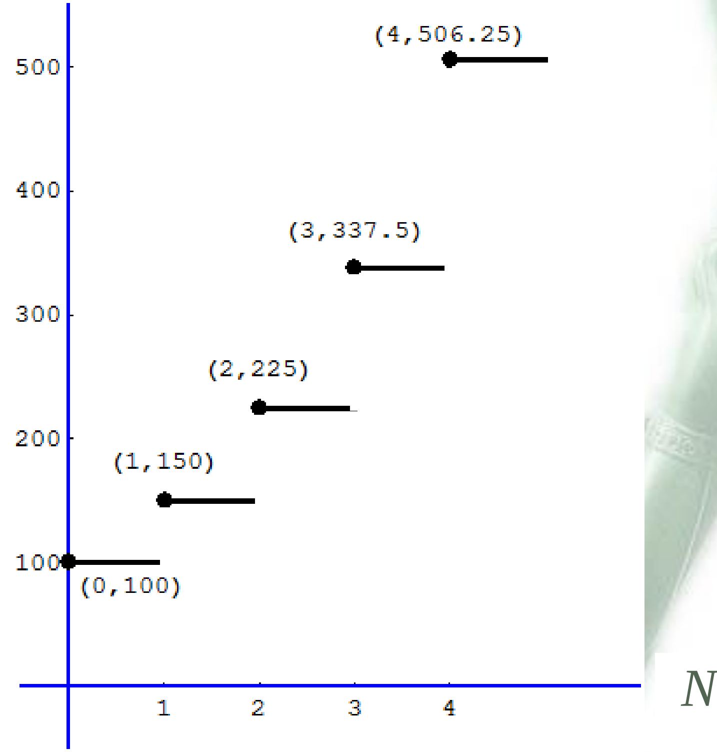
$$\log_{10} E = 11.8 + 1.5M$$

로 나타난다. 규모가 1 커지면 에너지는 32배 증가한다.

$31.6228 = 10^{\frac{3}{2}}$

신용대란과 대부금의 관계





차용한 기간 N에 대한 지수함수인 대부금 $A = 100(1.5)^N$ 의 그래프

매 기간 단위로 증가하는 대부금액이 일정한 경우의 대부금에 대한 그래프

기울기(변화율)의 계산

- 변화하는 양을 나타내는 함수 $f(x)$ (Newton은 이를 유량(fluent)이라 함)
- 변수 x의 한 점 a의 변화량(함숫값) $f(a)$
- 변수 x가 a에서 이동한 점 $a+h$의 변화량 (함숫값) $f(a+h)$
- 두 변수 값 a와 $a+h$사이의 변화량의 차이 $f(a+h)-f(a)$
- 평균변화율 : a와 $a+h$사이의 변화량의 평균적인 변화율

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

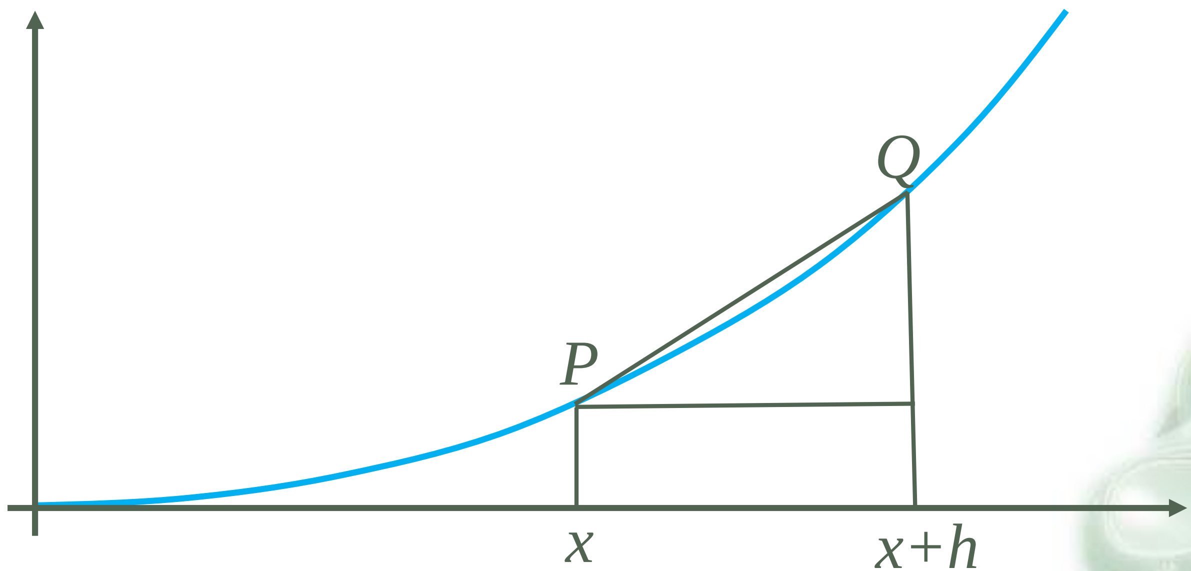
변화율과 도함수

- 점 a에서의 변화율 : 점 a에서의 순간변화율 : h 값이 최소(무한소)일 때의 변화율
- $f'(a)$: 점 a에서 미분계수

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a}$$

- 도함수: 모든 점에서의 변화율 (Newton은 이 함수를 유율(fluxion)이라 함)

Leibniz는 x의 미세 변화량(증분) h 대신에 dx를 사용하여 이에 상응하는 y의 변화량을 dy로 표현함으로써 도함수를 두 증분의 비의 의미로 파악하게 하였다.



$y = x^2$ 의 도함수

철학적 비판(1734): 영국 철학자 및 주교 (George Berkeley)

- 무한소(한없이 작은, 무한히 작은)의 설명요구
- 비판: 증분은 유한한 양도 아니고 무한한 양도 아니며 존재하지 않는 것도 아니다. 그렇다면 그것은 무엇인가? 사라진 양의 유령 아닌가? 따라서 수학자들은 죽어버린 귀신을 믿는 이단자라고 비판함
- 비판해설: 증분이 고정된 양이라면 Berkeley 비판이 옳다. 그러나 증분도 하나의 변수이다.

Berkeley 비판에 대한 해결

1821 프랑스 Cauchy(1789-1857)가 변화하는 양의 극한(limit)에 대한 결정적 개념 개발, 몇 년 후 독일의 Weierstrass는 극한개념의 형식적인 정의를 제시함. (완결되기까지 200년 소요)

극한의 정의 :

$$\lim_{x+h\to x} f(x+h)=A \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \text{ such that}$$

$$\text{if } 0<|h|<\delta, \text{ then } |f(x+h)-A|<\varepsilon$$

주목할 점 : 어떠한 동적 과정을 표현하는 것이 아니라, 단순히 어떤 특성을 가진 수의 존재를 언급함.

정리 및 예습

- 정리
  - 주변에서 볼 수 있는 변화와 변화율을 예를 들어 설명하기
  - 자신의 전공분야에서 볼 수 있는 변화와 변화율을 예를 들어 설명하기
  - 운동의 역설 극복하기
- 예습
  - 1997년 아시아 경제위기와 2008년 세계경제위기에 대하여 알아오기.
  - 위기관리와 변화의 예측가능성에 대하여 생각해보기