변화 양식

변화의 양식

변화의 양식: 미분방정식

변화와 미분방정식

- 변화에 대한 해석과 위기관리(해가 존재할 경우)
- 1986년 우크라이나 체르노빌 원전 사고 때, 방사능물질 유출에 따른 주변 지역 주민 소개와 범위 및 시기에 대한 처리.
- AI(조류인플루엔자) 2008년 5월 김제 발생 서울 대구 부산 등 대도시까지 확산 – 이동판매상 관리 방역체계허술
- 신종 플루 (2009년 4월 멕시코 다수인명 사망) 한국도 많은 사망자 발생
- 구제역(2010년 10월 안동발생구제역 경북 강원 경기 충청으로 확산 - 초기대응 실패 (의심 신고 때 처리 불투명)
- 메르스(2015년 5월) 186명 확진, 병원 내 감염
- 2011년 지진해일 후쿠시마 원전 사고 –초기대응 실패 소개범위 10km 20km 30km 등 미국인 70 km
- 2016년 경주 지진 - 위기관리 초보수준

예) 방사능 사고의 경우

- 사고 발생 t 시간 뒤 방사능 물질의 양 $M(t)$
- 미분방정식(방사능 물질 증가율):

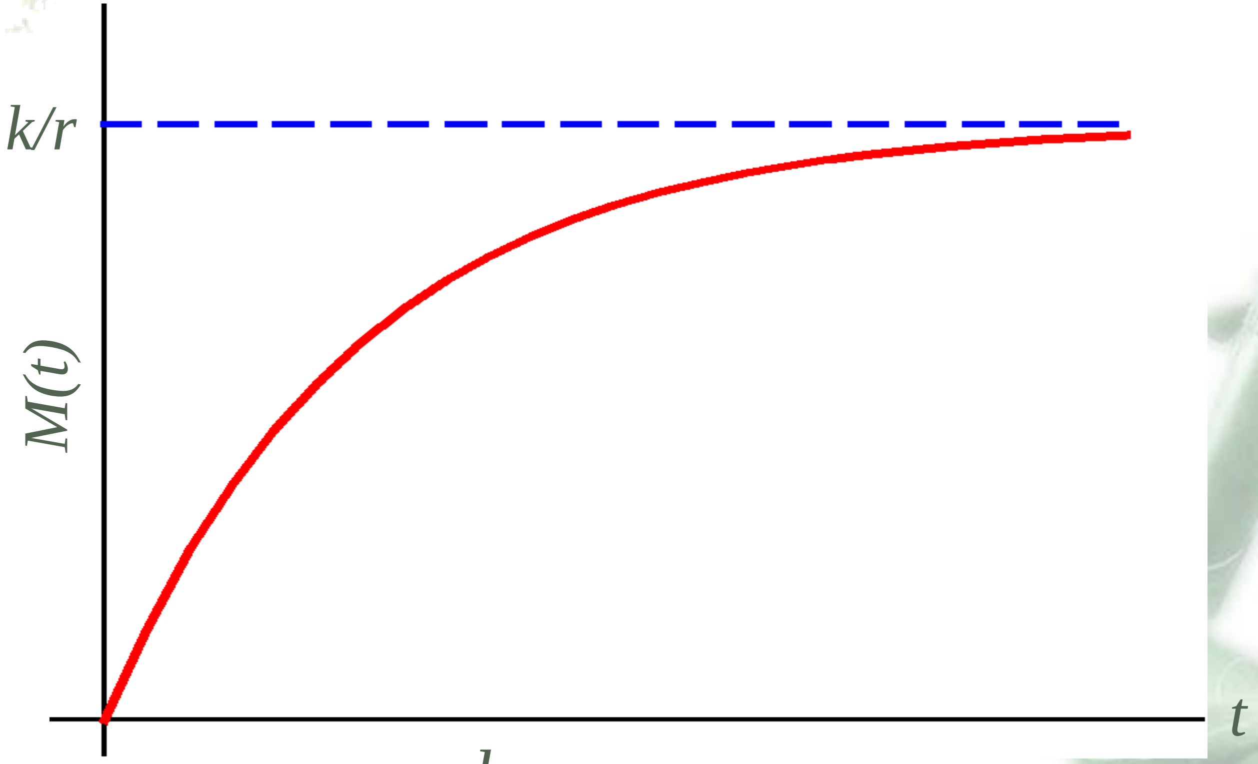
$$\frac{dM}{dt} = r\left(\frac{k}{r} - M\right)$$ (물리 실험의 결과)

단 k 는 대기 속으로 방출되는 비율

r 은 방사능 물질의 붕괴비율

- 해 : $M(t) = \frac{k}{r}\left(1 - e^{-rt}\right)$ 제한된 증가를 나타냄

제한된 증가



$$M(t)=\frac{k}{r}\left(1-e^{-rt}\right)$$ 의 그래프

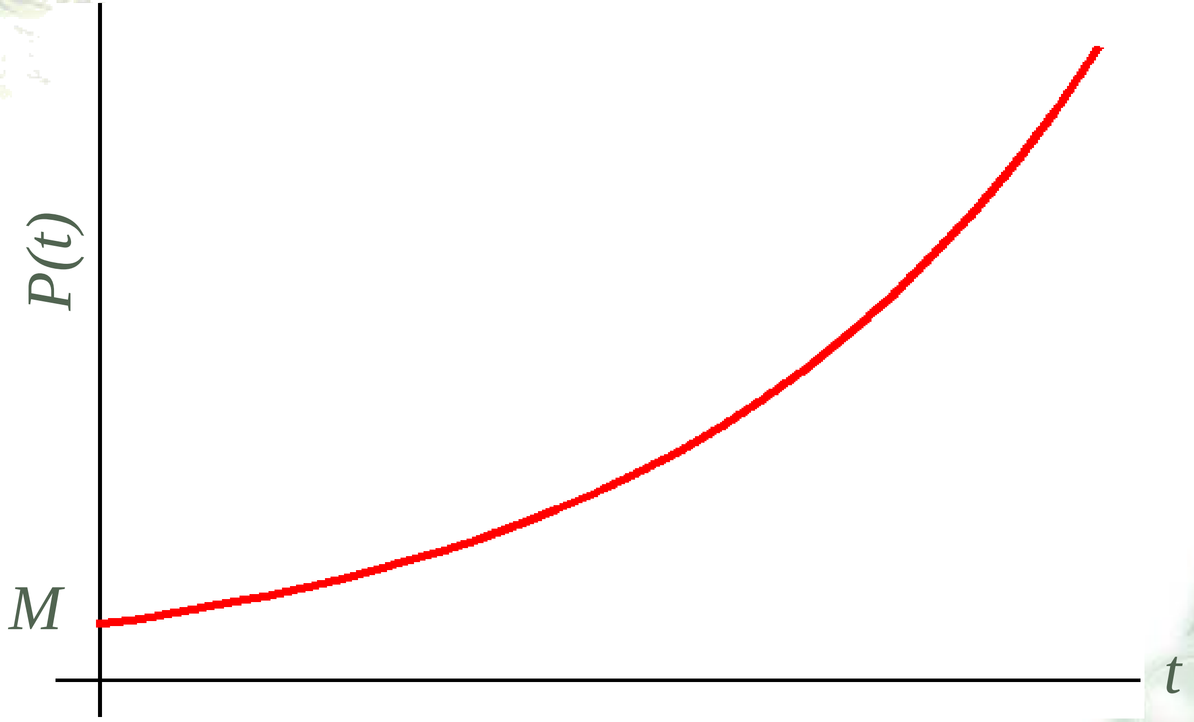
제한된 증가(limited growth)

- 물리학 : Newton의 냉각법칙
- 심리학 : 학습곡선(Hullian)
- 의　학 : 약물의 정맥주입비율
- 사회학 : 정보의 확산
- 경제학 : 화폐가치의 하락, 신상품판매,
  사업의 성장

자유로운 증가(uninhibited growth)

- 짧은 기간 동안의 동물 개체군 또는 유행병의 증가
- 모집단의 크기 : $P(t)$
- 미분 방정식(개체 증가율) : $\dfrac{dP}{dt} = rP$
- 단 r 은 고정된 증가율
- 해: $P(t) = Me^{rt}$

자유로운 증가



$P(t) = Me^{rt}$ 의 그래프

억제된 증가(inhibited growth):

- 긴 시간 동안의 개체의 증가(제한된 자원과 영역의 영향)
- 모집단의 크기 : $P(t)$
- 미분 방정식(개체 증가율) :

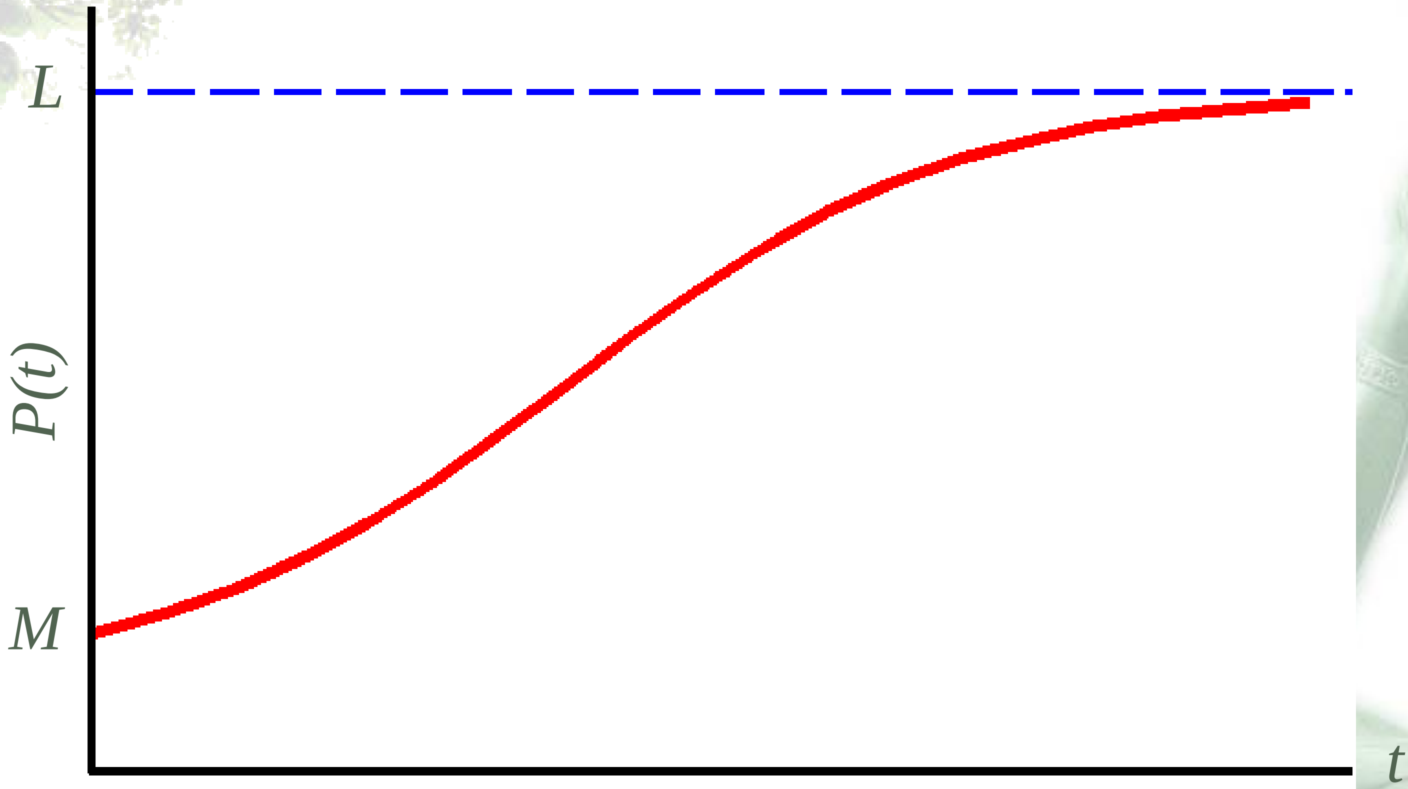
$$\frac{dP}{dt} = rP(L-P)$$

단 r 은 고정된 증가율 L 은 모집단의 한계

- 해:

$$P(t) = \frac{ML}{M + (L-M)e^{-Lrt}}$$

억제된 증가



$$P(t) = \frac{ML}{M + (L - M)e^{-Lrt}}$$ 의 그래프

자유로운 감소

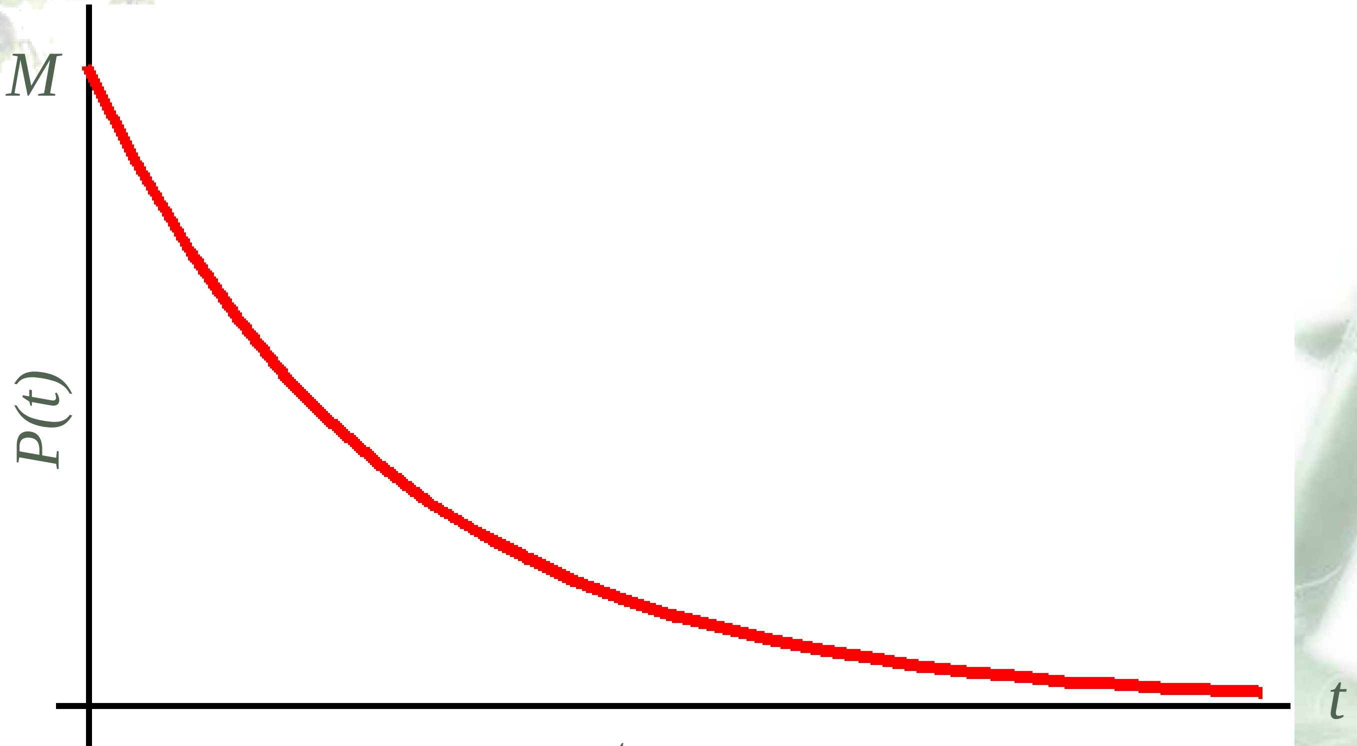
- 자유로운 감소(uninhibited decay) :
  방사능 감소 , 천연자원의 고갈
- 모집단의 크기 : $P(t)$
- 미분 방정식(개체 증가율) :

$$\frac{dP}{dt} = -rP$$

단 r 은 고정된 증가율

- 해: $P(t) = Me^{-rt}$

자유로운 감소



$P(t) = Me^{-rt}$ 의 그래프

불확실성을 피하는 수단: 주식에서의 파생상품

김장김치 8월 파종 11월 수확 : 풍작이면 헐값 흉작이면 고가

이 같은 불확실성을 피하기 위하여 농민과 도매상 사이의 계약체결이 필요. 농민과 도매상 어느 쪽이든 기후변화 사회환경변화 등 고려할 사항이 많음 . 모든 수집 가능한 정보들을 고려하고 변수를 감안하여 계약을 해야 한다. 금융시장도 같은 방법으로 고려하면 된다.

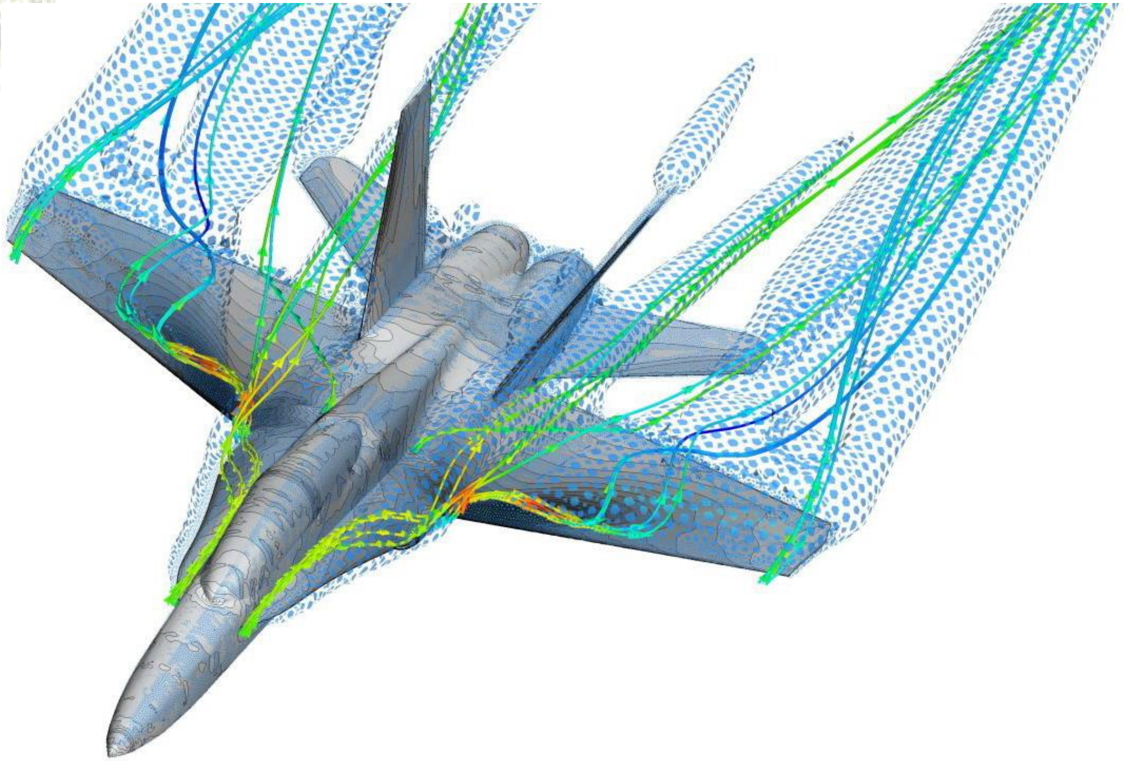
2008년 미국금융위기 문제점 : 파생상품의 위험성 간과.

1997년 아시아 위기에 헤지펀드들은 고수익 얻었음.

미적분의 응용

고속 비행체 주위의 기류

미적분의 응용



고속 비행체 주위의 기류
미분방정식을 풀어서 컴퓨터 모의 실험

미분학의 예상치 못한 선물:

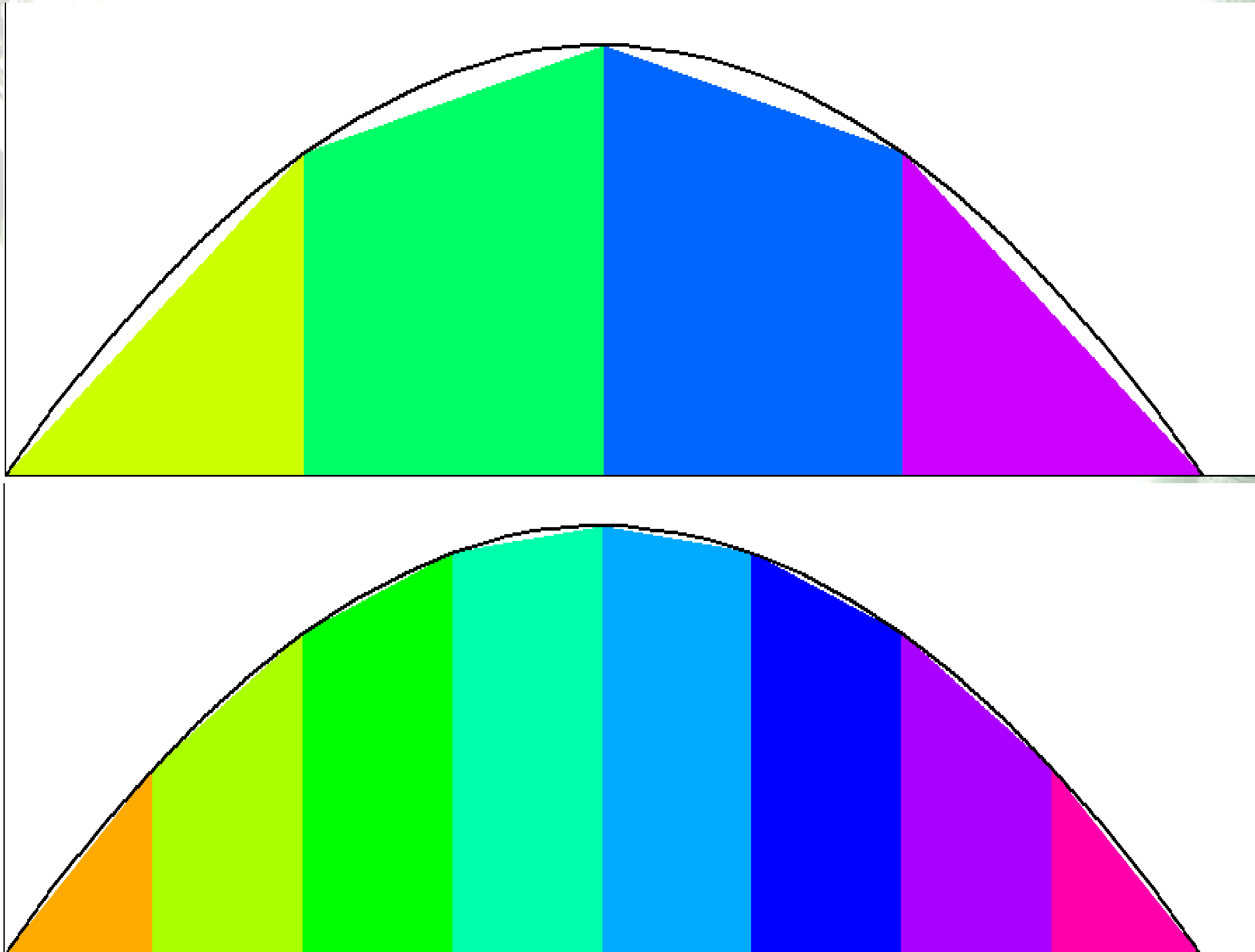
- 미분 양식이 적분 양식과 역관계임을 발견
- 제곱수가 음수가 된다는 직관에 어긋나는 실체를 포함하는 수 체계를 수용하게 자극을 줌

적분

- 적분 :기하학적 도형의 넓이와 부피의 계산의 시작에서 출발

- 에우독소스(Eudoxus): 플라톤의 제자
  실진법(method of exhaustion) 발견
  원뿔은 원기둥 부피의 3분의 1임을 밝힘

아르키메데스(Archimedes): 실진법 이용 포물선으로 쌓인 도형의 넓이 계산함.



아리스타코스(기원전 265년) 태양중심설

피타고라스 학파 필롤라오스 : 지구는 둥글다. 기원전5세기

아리스토텔레스 : 기원전 4세기 지구는 여러 개의 축으로 회전하는 27개의 구체로 이루어진 우주의 중심이다. --1500년간 굳어지는 이론이 된다.

천문학자의 의문

- 1) 지구가 움직일 때 바람소리는 왜 못 듣는가?
- 2) 탑 위에서 물체를 떨어트리면 왜 바로 떨어지는가?
  달리는 마차 위에서 물체를 떨어트리면 뒤쪽으로 떨어 지는데
- 3) 스토아 철학자 클레안테스는 아리스타코스를 신을 부정했다는 이유로 고소함. …그렇게 잊혀짐.

코페르니쿠스(1473-1543) 태양중심설과 중세사고몰락 및 근대사고의 출발(인간지성의 힘)

인간지각의 약점(한계)의 극복: 그의 사상이 케플러로 이어지고 과학과 인간사고의 새로운 변화를 초래하게 되었다.

- 1) 자전과 공전은 눈으로 볼 수 없고 몸으로 느끼지 못하기 때문에 태양중심설은 감각의 증거를 거부하게 된다.
- 2) 사물들은 외관상 존재하는 대로 존재하지 않는다. 감각에 따른 자료는 인간을 오도 할 수 있다. 이성만이 신뢰할 만한 안내자이다.
- 3) 이를 통하여 많은 논쟁과 위험이 있었다. 수학적 논쟁이 신학의 논쟁보다 어쩔 수없이 더 설득력 있음이 판별 되었고, 자유를 위한 투쟁은 승리하였다. 결국 과학의 독립선언은 수학의 정리를 모아놓은 것이다.

Kepler(1571-1630) 행성운동 법칙

포물선이나 타원의 내부 면적의 계산이 필요하게 됨을 인식

- 1) 행성은 태양 주위를 타원 궤도에 따라 회전한다.

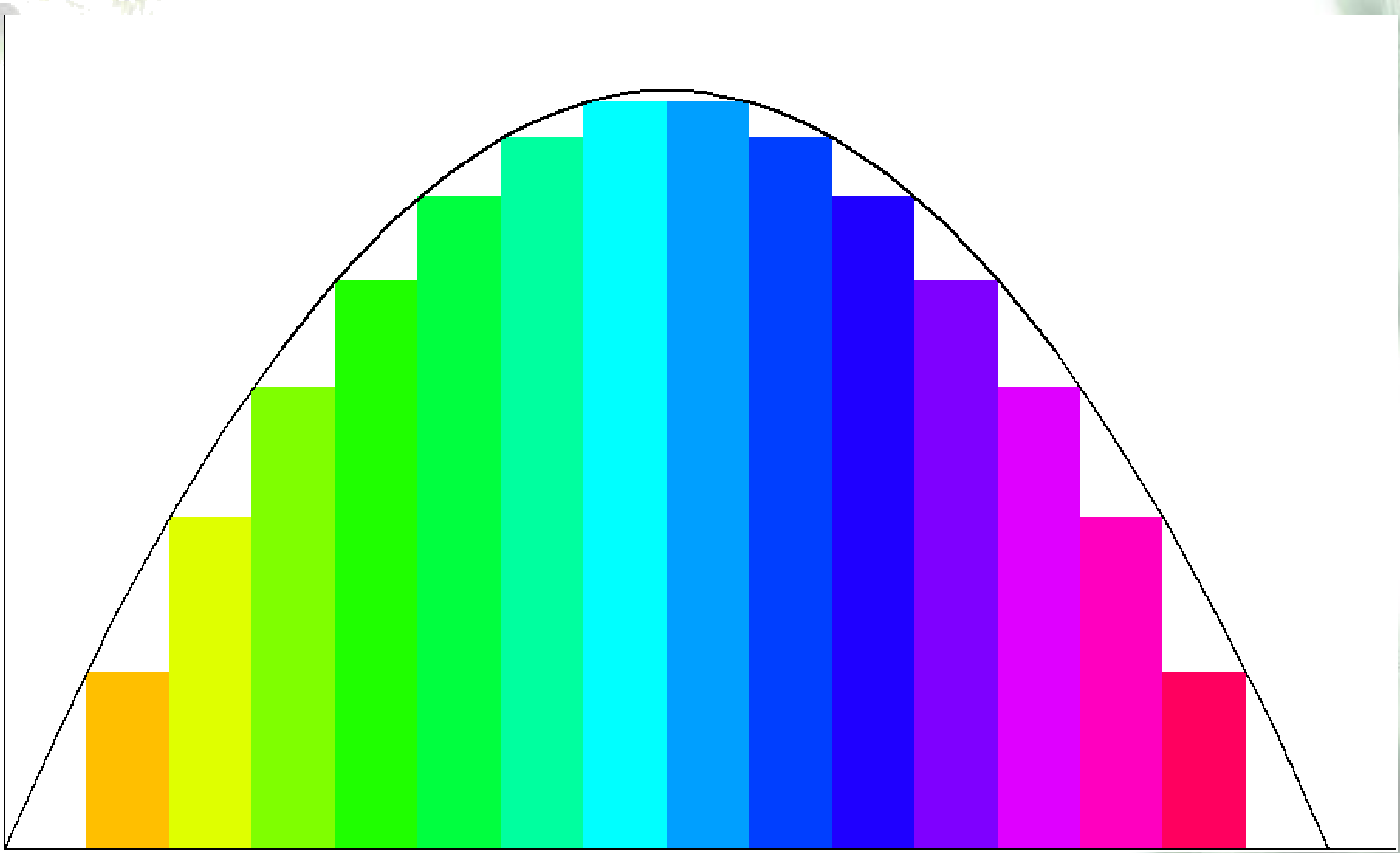
  이 때 태양은 한 초점에 있다.
- 2) 행성과 태양을 연결하는 선분이 똑같은 시간에 만드는 궤적의 넓이는 같다.
- 3) 행성과 태양 사이의 거리의 세제곱은 행성 1주기의 제곱과 같다.

불가분량의 방법

- 갈릴레오(1564-1640) 카발리에리(Cavalieri 1598-1647)
- 불가분량의 방법(method of Indivisibles 카발리에리가 1635년 불가분량의 연속기하학 출판)으로 적분계산
- 정적분의 정의에 따른 계산

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

불가분량의 방법



미분적분학의 기본 정리

- $A(x)=\int_a^x f(x)dx$ 로 정의하면 h가 x의 증분일 때

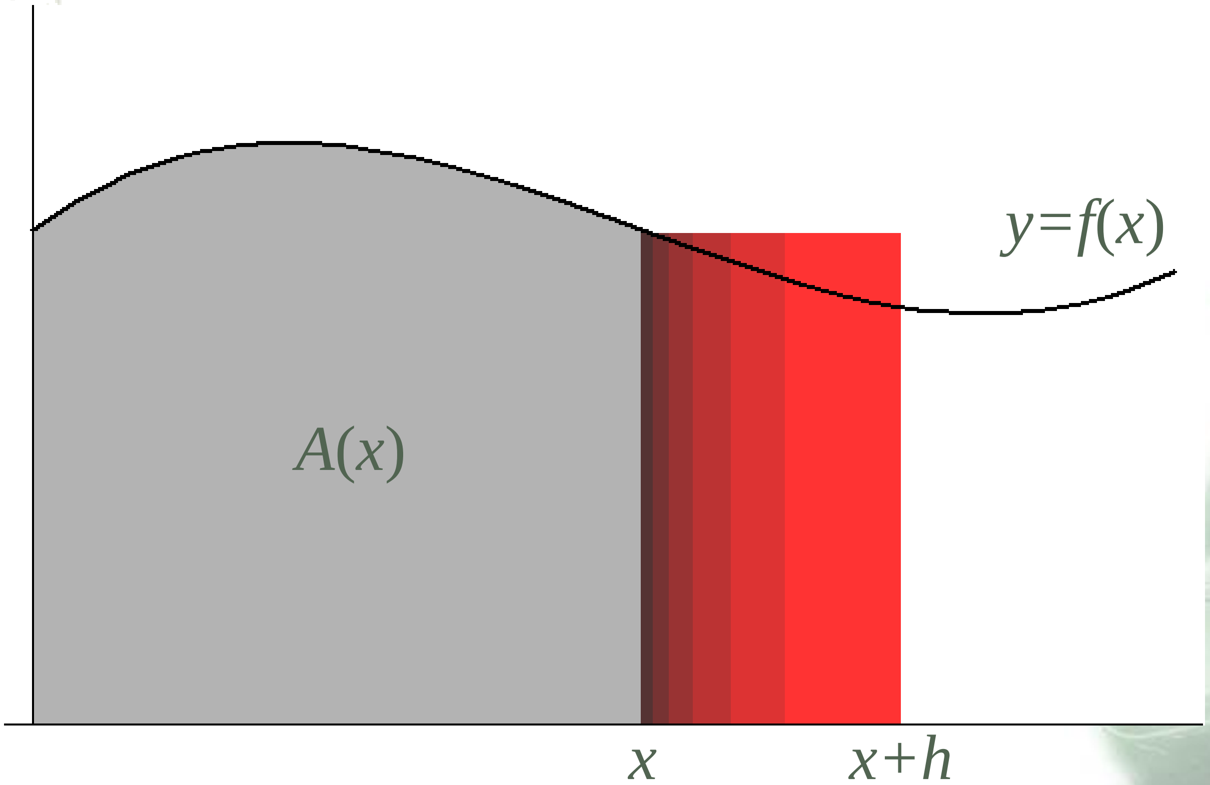
근사식 $A(x+h)-A(x)=h\times f(x)$가 얻어진다.

따라서 근사적으로 $\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$

이고 h가 증분이므로 다음식이 성립한다.

$$(**) \qquad A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$$

- 식(**)를 미분적분학의 기본정리라 한다
- [참고]오늘날은 적분을 하는 프로그램이 개발되어 있다.



미적분학의 기본정리에 대한 증명

실수와 그 성질

- 시공간은 연속(연결)되어 있는가? 불연속 적인 입자(원자)적인 성질을 갖고 있는가? 우리의 감각기관은 어떻게 이것을 인지할 수 있는가? 그리스시대부터 19세기까지 시간과 공간은 연속적인 것으로 가정하여 과학발달이 이루어졌다. 즉 시간과 공간은 연속체로 간주 되었다.

완비성의 공리

- 1870년대는 미분적분의 기법들의 엄밀한 연구를 위해서는 실수의 연속체의 문제를 다루어야만 하는 시기였다. 즉 실수는 양방향으로 무한히 뻗은 직선에 분포하는 점집합으로 간주하게 된 것이다. 유리수의 이론만 가지고는 극한 이론을 다루기에는 미흡함을 발견하였기 때문이다. 유리수열 들의 극한이 유리수가 아닌 것이 나타난 것이다.

- 유리수의 극한을 직선 위에 나타내어야 하는 당위성이 제기됨(이 극한은 무리수이고 무리수도 수직선 위에 위치를 점하여야만 하였다.) 이것을 공리로 받아들인 것이 Cauchy의 완비성의 공리(수열이 항이 커갈수록 두 항 사이가 점점 영에 가까워지면 수열은 수렴한다)이다.
- 주 연구자는 Cauchy, Weierstrass, Dedekind 등.
- 오늘날의 엄밀한 실수의 구성과 미분적분학에 관한 연구를 실해석학이라 한다.

복소수의 발견(탄생?)

- 제곱수가 음수가 된다는 직관에 어긋나는 실체를 포함하는 수 체계를 수용하게 자극을 줌
- 시작 : 동양의 음수발견: 기원전1,2세기부터 사용: 중국 적자와 흑자 (산목을 비스듬하게 놓아 음수표현)
- 인도 630년 브라마굽타
- 유럽: 디오판토스(275) : 방정식의 음수 해를 불합리한 것으로 취급

- 카르다노(1545) : 위대한 술법이란 이름의 대수 책 출판. 음수를 인정하였으나 진짜로 받아들이지는 못함. 같은 방법으로 제곱근을 갖는 음수의 존재를 가정하는 것이 대수문제 해결에 유용함을 인식함
- 음수를 받아들이지 못한 이유: 양수개념이 길이와 넓이를 나타내는 그리스 기하학적 개념에서 출발
- 데카르트(1637년 방법서설 부록 기하학) : 좌표기하학의 도입으로 음수 포함
- 복소수의 도입 : 허수 i 의 실재의 존재성을 무시하고 잡탕 수 $z=a+bi$ 를 도입함. 19세기 중반까지 진정한 수로 간주되지 않음.

대수학의 기본정리:

- 대수학의 기본정리: 계수 $a_i\ (i=0,1,\ldots,n)$이 복소수인 임의의 다항 방정식

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

은 복소수 근을 갖는다.

  - 17세기 예측, 달랑베르가 1746년 부정확한 답 제시함. 오일러도 1749년 부정확한 답을 제시하였으나, 1799년 가우스가 박사학위 논문에서 해결함

- 오일러 공식: 1748년 오일러가 발견

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

복소 해석학(Complex Analysys)

- 해석적 수론(analytic number theory) :
- Riemann: 자연수의 성질을 복소 미적분학 방법을 사용하여 연구.
  – 1859 “주어진 수보다 작은 소수의 개수에 대하여” 란 논문집필
  – 소수추측 : 큰 수 N 에 대하여 N 보다 작은 소수의 개수 $\pi(N)$는 N 이 무한대에 접근함에 따라 비

$$\frac{\pi(N)}{[N/\ln N]}$$

의 극한값은 1이다.

Riemann가설

- 체비셰프(1852)의 결과: 위의 비는 0.992와 1.105사이에 있다. 제타함수 이용 결과를 얻음
- 제타함수(오일러의 정의) :

$$\zeta(x)=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\cdots+\frac{1}{n^x}+\cdots \quad (x>1)$$

- 오일러는 제타함수가 소수와 관계 있음을 밝힘.
- Riemann의 연구: 제타함수의 복소 영점, $\zeta(x)=0$의 해를 알게 된다면 소수추측을 증명할 수 있음을 인식. (실수영점 $-2,-4,-6$, ... 복소 영점 $\frac{1}{2}+yi$형 15억 개 밝혀짐). 모든 영점은 위의 꼴뿐이란 가설을 세우고 이것에서 소수추측이 유도된다. 단 Riemann은 제타함수의 정의역을 확대하여 생각함.

소수추측해결

- Riemann가설은 미해결이다. 2000년5월 크레이 연구소(CMI)는 20세기 난 문제7개를 문제당 100 만불 포상금을 걸었다. 그 중 한 문제이다.
- 소수추측의 해결 : 1896년 아다마르(J. Hadamard)와 푸생(C. Poussin)에 의해 리만의 가설을 사용하지 않고 독립적으로 증명되었음.

정리 및 예습

- 정리
  - 방정식과 미분방정식 이해하기
  - 실수의 성질과 복소수의 발견 등으로 인한 인류의 인식체계 변화를 이해하기
- 예습
  - 유클리드 기하학에 대하여 알아보기
  - 삼각형의 성질 조사하기